日地 Halo 轨道的多约束转移轨道分层微分修正设计

张景瑞[1]，曾 豪[1]，李明涛[2]
(1. 北京理工大学宇航学院，北京 100081; 2. 中国科学院空间科学与应用研究中心，北京 100190)

摘 要: 针对日 - 地系统 L1 点(简称 SEL1 点) Halo 轨道转移轨道设计中存在的多约束与初值敏感性问题，提出一种基于分层微分修正与初值多项式的设计方法。首先定义平动点转移轨道设计过程中存在的约束条件，然后根据不同的终端约束条件，重点给出了同时考虑轨道高度、轨道倾角、升交点赤经与航迹角等多约束条件下的分层微分修正方法。通过分析约束变量与控制变量之间的关系，得到能够解决微分修正初值问题的初值表达式。最后在多约束条件下设计了从轨道高度为 200 km 的地球停泊轨道到 SEL1 点 Halo 轨道的转移轨道。仿真结果表明，分层微分修正方法能够处理多约束问题，且初值表达式可以为微分修正提供良好的初始条件，从而保证算法收敛，方法具有较好的实用性。

关键词: 平动点轨道; 分层微分修正; 转移轨道; 多约束条件
中图分类号: V412.4 +1 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2015)10-1114-11
DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2015.10.004

Hierarchical Differential Correction Based Transfer Trajectory Design for Halo Orbit with Multiple Constraints

ZHANG Jing-rui[1], ZENG Hao[1], LI Ming-tao[2]
(1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
2. Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: To cope with the orbit transfer problem with multiple constraints and sensitive initial values around the libration point L1 of the Sun-Earth system (SEL1 point), a transfer trajectory design method based on hierarchical differential corrections and initial value polynomial is proposed. At first, constraints are analyzed in the process of designing the transfer trajectory around the libration point. According to different terminal constraints, the hierarchical differential correction method is proposed by considering orbit altitude, orbit inclination, right ascension of ascending node and track angle simultaneously. Then, by analyzing relation between constraint variables and control variables, the initial value expression is got to solve the initial value problem of differential corrections. Finally, transfer trajectory from the earth parking orbit whose altitude is 200 km to Halo orbit around SEL1 point is designed under the condition of multi-constraints. The simulation results indicate the hierarchical differential correction method can deal with the problem with multiple constraints and initial value polynomial can provide appropriate initial conditions for differential corrections so as to guarantee convergence of the algorithm. In conclusion, this method has good practicality.

Key words: Libration orbit; Hierarchical differential corrections; Transfer trajectory; Multiple constraints

0 引 言

日地系统 L1 点(简称 SEL1 点)是位于日地之间的共线平动点，利用 SEL1 点相对主天体不变的几何构型，可将探测器定点于平动点附近[1]。例如，当航天器运行在 L1 点附近的 Halo 轨道时，能够实现对日观测，并可为探测深空环境提供最佳的落脚点。因此，在考虑时间与燃耗等条件下，探测器如何顺利地

收稿日期: 2014-09-22; 修回日期: 2015-01-13
基金项目: 国家自然科学基金(11172036,11290151)

到达平动点附近轨道成为了现今深空领域研究的热点问题。目前，已有多个探测器利用 SEL1 点 Halo 轨道执行了科学探测任务。具体地，分别于 1978 年和 1994 年发射的 ISEE-3 及 Wind 探测器，通过 SEL1 点附近的 Halo 轨道，观测了太阳活动变化对近地空间环境的影响[2]。于 1995 年发射的 SOHO 观测台，运行在 Halo 轨道上观测分析了太阳内部结构变化，进一步研究了太阳风的形成与加速过程[3]。而 NASA 研制的 Genesis 探测器同样利用 SEL1 点 Halo 轨道完成了采集返回太阳风样本任务[4]。

针对平动点转移轨道设计，文献[5]详细地分析了平动点附近同、异宿连接的力学机制并论述了平动点理论在 Halo 轨道的转移轨道设计中的应用。Zazzera 等结合 Poincaré 截面与不变流形设计了无约束条件下的平动点转移轨道[6]。李明涛等以小振幅 Halo 轨道为目标轨道并利用不变流形分别对不含约束条件与考虑轨道高度、轨道倾角或升交点赤经时的 L1 点转移轨道进行了分析[7-8]。文献[9]将序优化理论与微分修正算法结合，在仅考虑地球停泊轨道高度约束条件下，设计了 SEL1 点 Halo 轨道的两脉冲转移方案。Qi[10]与雷汉伦等[11]等结合不变流形与小推力技术，利用混合优化算法，分别设计了满足状态矢量约束的地 - 月与日 - 火系平动点转移轨道。Howell 等[4,12]利用两级微分修正法设计了特定轨道倾角及升交点赤经约束下的 Genesis 返回任务轨道。但两级微分修正存在分段优化计算时间长与初值精度要求高的问题。

综上所述，以往研究常常局限于无约束或两种以下约束(简称少约束) 的简化模型，基于简化模型必将增大轨道设计误差，难以满足越来越复杂的任务要求。并且转移轨道末端少约束条件无法完全确定地球停泊轨道根数，在工程应用中存在着局限性。与此同时，在轨道设计过程中，以往研究并未给出详细的初值选取依据。

本文针对以上问题，提出了相应解决方法。首先，在轨道设计过程中同时考虑轨道高度、轨道倾角、升交点赤经及航迹角等多种约束条件(简称多约束)，从而能够准确地确定圆形地球停泊轨道。在求解多约束情况下的转移轨道设计问题时，提出了分层微分修正搜索算法，解决了一次修正算法容易出现不收敛的问题，并且通过分析状态转移矩阵在微分修正中的作用，在算法中添加比例因子加快收敛，提高了计算效率。其次，为了解决微分修正算法的初值敏感性问题，研究了目标轨道入轨点不同机动速度增量大小及方向对转移轨道设计的影响，给出了初值多项式，保证修正算法收敛。通过具体算例分析，有效地设计了从轨道高度为 200 km 的地球停泊轨道出发到 SEL1 点 Halo 轨道不同入轨点的转移轨道，对深空探测器的轨道设计具有借鉴意义。

1 圆型限制性三体模型及设计变量

本文以日、地及航天器构成的圆型限制性三体模型进行分析，研究航天器在两个主天体引力作用下的运动状态。根据能量法并对参数进行无量纲化后，航天器在会合坐标系下的动力学方程为[13]：

$$\begin{cases}\ddot{x} - 2\dot{y} = -\overline{U}_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -\overline{U}_y \\ \ddot{z} = -\overline{U}_z\end{cases} \tag{1}$$

式中:

$$\begin{cases}\overline{U} = -\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) - \dfrac{1-\mu}{r_1} - \dfrac{\mu}{r_2} - \dfrac{1}{2}\mu(1-\mu) \\ r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2} \\ r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}\end{cases} \tag{2}$$

$\overline{U}_x$，$\overline{U}_y$，$\overline{U}_z$ 分别表示有效势能 $\overline{U}$ 关于 x，y，z 的偏导数。

为了清晰地描述转移轨道与初值表达式的设计过程，首先定义转移轨道设计时使用的控制变量与约束变量，如图 1 所示。

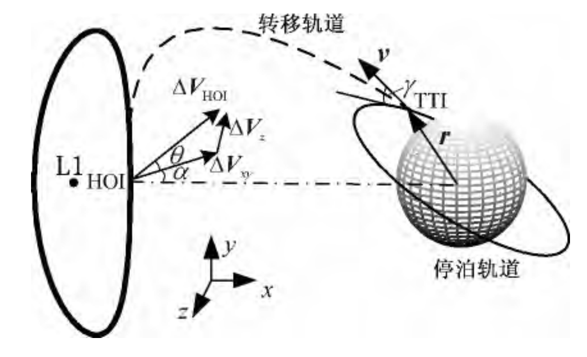


图 1 转移轨道设计变量

Fig. 1 Definition of transfer trajectory design variables

为了充分利用目标 Halo 轨道的信息并保证转移轨道末端满足约束条件，本文采用反向积分方法

求解转移轨道，即将 Halo 轨道作为转移轨道的初始点，而终点位于地球停泊轨道上。因此，在微分修正过程中，控制变量选取 Halo 轨道入轨点（简称 HOI 点）处三轴速度增量 $\boldsymbol{X}_0 = [\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z]^{\mathrm{T}}$ 及飞行时间 T。在停泊轨道逃逸点（简称 TTI 点）处，为了直观地描述地球停泊轨道参数，选取约束变量 $\boldsymbol{X}_f = [h_f, \gamma, i, \Omega]^{\mathrm{T}}$，分别为轨道高度、航迹角、轨道倾角与升交点赤经。

同时，为了保证控制变量具有良好的初值，从而使得微分修正算法收敛，对初值多项式设计过程中使用到的变量进行定义（见图 1）。在 HOI 点处，将速度增量进行投影，其中 $\Delta V_{xy}, \Delta V_z$ 分别为 xy 平面与 z 轴上的速度增量，α, θ 为各坐标平面内由速度增量构成的角度。在 TTI 点处，γ 为相对地球的飞行航迹角，β 为位置矢量在 xy 平面内投影 r_{xy} 与 x 轴的夹角。始末端点变量的数值可分别通过初值点与终点的状态矢量进行求解。

由于地球停泊轨道升交点赤经与轨道倾角定义在地心赤道惯性系下，而求解航天器的动力学方程位于会合坐标系下，因此需要将不同坐标系下的状态量转换到同一坐标系中。本文将会合系下的状态矢量转换到地心赤道惯性系下，对轨道倾角与升交点赤经进行求解，首先定义图 2 所示坐标系。

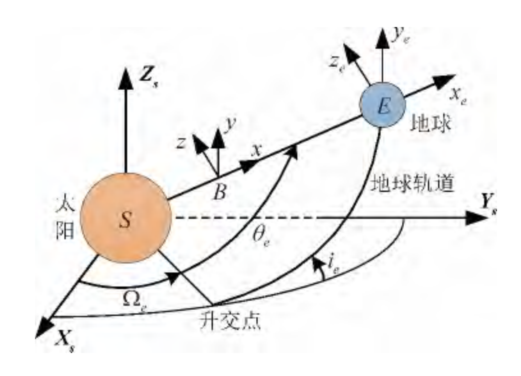


图 2 坐标系定义

Fig. 2 The definition of coordinate system

$SX_sY_sZ_s$ 为日心黄道坐标系；$Bxyz$ 为质心会合坐标系；$Ex_ey_ez_e$ 为地心会合坐标系。同时，假设地球相对于太阳的升交点赤经为 Ω_e、轨道倾角为 i_e 及纬度幅角为 θ_e，地球轨道根数取值通过星历获得。则地心黄道坐标系与地心会合系之间的坐标转换矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{\Omega_e}c_{\theta_e} - s_{\Omega_e}c_{i_e}s_{\theta_e} & -c_{\Omega_e}s_{\theta_e} - s_{\Omega_e}c_{i_e}c_{\theta_e} & s_{i_e}s_{\Omega_e} \\ s_{\Omega_e}c_{\theta_e} + c_{\Omega_e}c_{i_e}s_{\theta_e} & -s_{\Omega_e}s_{\theta_e} + c_{\Omega_e}c_{i_e}c_{\theta_e} & -s_{i_e}c_{\Omega_e} \\ s_{i_e}s_{\theta_e} & s_{i_e}c_{\theta_e} & c_{i_e} \end{bmatrix} \tag{3}$$

式中：c_k, s_k 分别表示余弦值与正弦值。对式（2）关于时间 t 求导可得速度矢量表达式。其次，假设黄道面与地球赤道面之间的夹角为 ε。最终，状态量由质心会合坐标系转换到地心赤道惯性系为

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{z}_e \end{bmatrix}_{eq} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mu - 1)C_{11} \\ c_\varepsilon(\mu - 1)C_{21} + s_\varepsilon(1 - \mu)C_{31} \\ s_\varepsilon(\mu - 1)C_{21} + c_\varepsilon(\mu - 1)C_{31} \\ (\mu - 1)C_{12} \\ c_\varepsilon(\mu - 1)C_{22} + s_\varepsilon(1 - \mu)C_{32} \\ s_\varepsilon(\mu - 1)C_{22} + c_\varepsilon(\mu - 1)C_{32} \end{bmatrix} \tag{4}$$

式中：

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ c_\varepsilon C_{21} - s_\varepsilon C_{31} & c_\varepsilon C_{22} - s_\varepsilon C_{32} & c_\varepsilon C_{23} - s_\varepsilon C_{33} \\ s_\varepsilon C_{21} + c_\varepsilon C_{31} & s_\varepsilon C_{22} + c_\varepsilon C_{32} & s_\varepsilon C_{23} + c_\varepsilon C_{33} \end{bmatrix}$$

C_{ij} 为坐标转换矩阵中第 i 行、第 j 列元素，则轨道倾角与升交点赤经的表达式满足

$$\begin{cases} i = \arccos\left(\dfrac{x_e\dot{y}_e - y_e\dot{x}_e}{\sqrt{(y_e\dot{z}_e - z_e\dot{y}_e)^2 + (z_e\dot{x}_e - x_e\dot{z}_e)^2 + (x_e\dot{y}_e - y_e\dot{x}_e)^2}}\right) \\ \Omega = \arccos\left(\dfrac{x_e\dot{z}_e - z_e\dot{x}_e}{\sqrt{(y_e\dot{z}_e - z_e\dot{y}_e)^2 + (x_e\dot{z}_e - z_e\dot{x}_e)^2}}\right) \end{cases} \tag{5}$$

应注意,在求解升交点赤经时,取值存在象限问题,需要分类讨论。

2　约束条件下的转移轨道设计方法

2.1　末端约束条件分析

转移轨道末端常常施加约束条件以满足实际任务的要求。同时,针对圆形停泊轨道,轨道根数包含轨道高度、轨道倾角及升交点赤经。因此,为了准确地确定地球停泊轨道,本文同时选取轨道高度、轨道倾角、升交点赤经及航迹角作为约束条件。结合上述四种约束条件,求解控制变量与约束变量关系式的步骤如下:

1) 根据转移轨道设计要求,选定控制变量。通过分析,本文选取控制变量为

$$\boldsymbol{X}_0 = [\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z, T]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

2) 针对轨道末端施加的约束条件,利用末端状态量计算约束条件的实际值,并与期望值 X_d 进行比较得到约束矢量,即

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_f) = \begin{bmatrix} h_f - h_d \\ \gamma_f - \gamma_d \\ i_f - i_d \\ \Omega_f - \Omega_d \end{bmatrix} \tag{7}$$

3) 通过分析控制变量与约束变量的关系,计算约束条件相对于控制变量的偏导数,即雅克比矩阵,可表示为

$$D\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_f) = \frac{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_f)}{\boldsymbol{X}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_f}{\partial \Delta V_x} & \frac{\partial h_f}{\partial \Delta V_y} & \frac{\partial h_f}{\partial \Delta V_z} & \frac{\partial h_f}{\partial T} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta V_x} & \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta V_y} & \frac{\partial \gamma}{\partial \Delta V_z} & \frac{\partial \gamma}{\partial T} \\ \frac{\partial i}{\partial \Delta V_x} & \frac{\partial i}{\partial \Delta V_y} & \frac{\partial i}{\partial \Delta V_z} & \frac{\partial i}{\partial T} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta V_x} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta V_y} & \frac{\partial \Omega}{\partial \Delta V_z} & \frac{\partial \Omega}{\partial T} \end{bmatrix} \tag{8}$$

4) 在实际求解时,常常以航迹角为零作为积分终止条件,能够简化计算并且得到合适的转移轨道,即地球停泊轨道半径不小于地球半径。因此,设定 $\delta\gamma = \gamma_f - \gamma_d = 0$ 。同时,结合雅克比矩阵可推导出函数 $\delta T = \delta T(\delta\Delta V_x, \delta\Delta V_y, \delta\Delta V_z)$,消去时间变量后得到控制变量与约束变量关系式为

$$\begin{bmatrix} \delta h_f \\ \delta i \\ \delta \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\Delta V_x \\ \delta\Delta V_y \\ \delta\Delta V_z \end{bmatrix} \tag{9}$$

以轨道高度为例

$$\begin{cases} A_{11} = \dfrac{\partial h_f}{\partial \Delta V_x} - \dfrac{\frac{\partial h_f}{\partial T}}{\frac{\partial \gamma}{\partial T}} \dfrac{\partial \gamma}{\partial \Delta V_x} \\ A_{12} = \dfrac{\partial h_f}{\partial \Delta V_y} - \dfrac{\frac{\partial h_f}{\partial T}}{\frac{\partial \gamma}{\partial T}} \dfrac{\partial \gamma}{\partial \Delta V_y} \\ A_{13} = \dfrac{\partial h_f}{\partial \Delta V_z} - \dfrac{\frac{\partial h_f}{\partial T}}{\frac{\partial \gamma}{\partial T}} \dfrac{\partial \gamma}{\partial \Delta V_z} \end{cases} \tag{10}$$

轨道倾角与升交点赤经约束同样具有类似表达式。需要注意,在具体地求解过程中,应考虑会合坐标系与地心赤道惯性系之间的坐标转换矩阵。

2.2　微分修正初值多项式

微分修正作为一种局部迭代方法,算法能否收敛到期望值,很大程度上取决于初值是否准确,而在以往的研究中并没有给出确切的初值及选取依据。本文通过分析初始控制变量与末端约束变量之间的关系,对数据进行多项式拟合,最终得到包含轨道倾角与飞行时间等参量的初值表达式,为轨道设计时确定初值提供方便。

具体地,设计过程中限定 HOI 处的法向速度增量大小,即 $\Delta V_z \in [-30\ \mathrm{m/s}, 30\ \mathrm{m/s}]$ 并以 2.5 m/s 的增量增加,针对特定法向速度增量大小,通过改变 xy 平面的速度增量与 β 角取值,从而得到满足转移轨道末端位于地球附近等要求的大量数据。基于数据并分析 HOI 点处不同速度增量大小与飞行时间、轨道倾角等参数之间的关系,并结合图 1 中定义的角度,对数据进行拟合后,最终得到包含轨道根数与飞行时间等参量的初值表达式。

图 3 给出了 β 角与飞行时间之间的关系。由图可知,在不同的法向速度增量大小条件下,曲线变化趋势一致并近似符合三次函数的特性。因此,基于三次函数进行构造,β 角与飞行时间之间满足

$$T = 99.486 + 0.519\beta + 0.0149\beta^2 - 0.0002\beta^3 \tag{11}$$

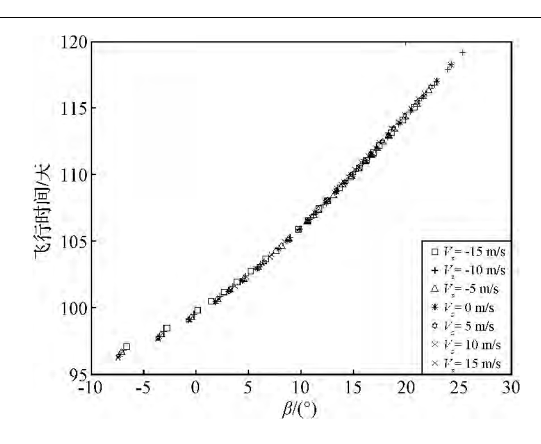


图3 β角与飞行时间变化曲线

Fig. 3 The relation curve between β angle and time of flight

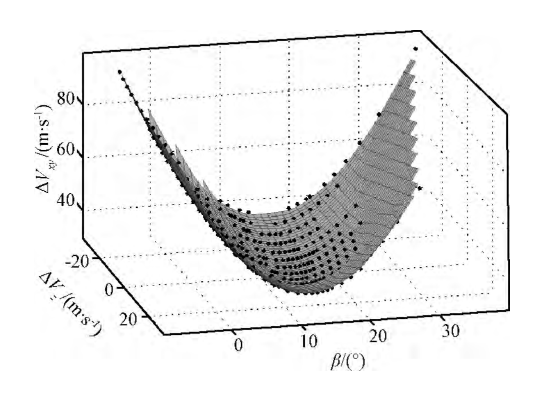


图4 速度增量与β角之间的关系

Fig. 4 The relation between β angle and the velocity increment

图4描述了速度增量沿平面及轴线分量大小与β角之间的关系曲面，其中的点表示仿真数据，具有二次曲面特性，针对此特性可得到式(12)所示的表达式

$$\Delta V_{xy} = -3.958\beta + 0.134\beta^2 + 0.0178\beta\Delta V_z - 0.190\Delta V_z + 0.00604\Delta V_z^2 + 61.553 \quad (12)$$

由式(11)与式(12)可知，在求解过程中需要确定法向速度增量大小 ΔV_z 与 α 角的取值，而不同的飞行时间及转移轨道末端约束条件对取值存在着一定的影响。因此，基于多变量对速度增量大小 ΔV_z 与 α 角的表达式进行拟合求解，满足

$$\begin{cases} i = -0.175\beta + 0.00266\beta^2 - 0.552\Omega + 0.00988\Omega^2 - \\ \quad 0.0218\beta\Omega + 0.000193\beta\Omega^2 - 5.721 \times \\ \quad 10^{-5}\Omega^3 + 33.02 \\ \Delta V_z = (4.653T - 0.0153T + 0.0183\Omega - \\ \quad 0.000188\Omega^2 - 311.646 - \beta)/0.0122 \\ \alpha = 23.007 - 0.584T - 0.00164i - 0.00362\Delta V_z - \\ 0.0815\beta + 0.00362T^2 - 7.80 \times 10^{-5}i^2 - 0.00305\beta^2 \end{cases} \quad (13)$$

式中：角度取值范围为 $\beta \in [0°, 30°]$，$\Omega \in [-28°, 60°]$，此处升交点赤经选取负值是为了保证得到良好的初值表达式。

表1 非线性拟合相关参数

Table 1 Parameters related to nonlinear fitting

拟合函数	相关系数平方 r^2	RMSE
$i(\Omega,\beta)$	0.9956	0.6394
$\Delta V_{xy}(\beta,\Delta V_z)$	0.9982	0.4572
$\Delta V_z(T,\Omega,\beta)$	0.9955	0.3418
$\alpha(\mathrm{TOF},\Delta V_z,i,\beta)$	0.9917	2.09×10^{-8}

针对微分修正初值多项式的设计结果，本文以最大残差模、相关系数平方值 r^2 与均方根误差 RMSE 为依据判断拟合程度的好坏。其中，图3拟合曲线对应的最大残差模为2.9741，而其他多变量拟合函数的相关参数如表1所示。通过非线性拟合参数与仿真校验可知，微分修正初值多项式拟合效果较好，能够为控制变量提供良好初始条件并保证算法收敛。

2.3 分层微分修正搜索算法

微分修正法为一种牛顿迭代逼近期望值算法，通过不断修正控制变量使得约束变量最终收敛于期望值[14]。当同时考虑轨道高度、轨道倾角、升交点赤经及航迹角多个约束时，由于转移轨道末端满足约束条件的程度各不相同，相互之间存在影响，最终使得一次修正算法将出现不易收敛的问题。再者，利用遗传算法或序列二次规划等优化算法对多约束问题进行求解时，存在计算时间长等问题。因此，针对以上问题，结合转移轨道末端不同的约束条件，利用分层修正算法搜索精确轨道，使得转移轨道末端同时满足轨道高度、轨道倾角、升交点赤经及航迹角的多种约束条件。

第一层修正：使转移轨道末端靠近地球。

在初步搜索过程中，只考虑轨道高度约束。由于选取的停泊轨道为近地轨道且初次积分得到的转移轨道末端距离地球较远，通过第一层修正能够保证转移轨道末端位于停泊轨道附近，为施加倾角与升交点赤经约束奠定基础。具体地，首先对初始状态量进行积分，判断约束条件 Δh_1 是否小于给定误差，若满足则进行下一层微分修正。否则，微分修正控制变量 $X_0 = [\Delta V_x, \Delta V_y, \Delta V_z]^{\mathrm{T}}$，直至满足轨道末端位置约束条件。

第二层修正：考虑轨道高度与倾角约束。

经过第一层修正后，保证了转移轨道末端位于地球附近，此阶段进一步细化修正模型，同时考虑轨道高度与轨道倾角约束。以第一层满足高度约束的状态量为初值进行积分，判断轨道末端高度与倾角约束 Δh_2，Δi_1 是否小于误差值，若满足则进行第三层修正，否则进一步对控制变量循环迭代求解，使得最终约束收敛于期望值。

第三层修正: 求解精确 SEL1 点 Halo 轨道转移轨道。

通过前两层微分修正，转移轨道末端高度与倾角已经接近期望值，但仍不满足升交点赤经约束。因此，第三层修正同时考虑轨道高度、轨道倾角及升交点赤经约束，最终获得满足多约束条件的精确 SEL1 点 Halo 轨道转移轨道。同样地，对上一层状态量进行积分，迭代修正控制变量使得轨道末端同时满足轨道高度、倾角及升交点赤经多约束条件。综上所述，分层微分修正流程如图 5 所示。

另一方面，为了保证算法具有较好的收敛效果且缩短计算时间，本文对传统微分修正算法中迭代修正量与状态转移矩阵分别进行改进。

首先针对迭代修正量，为了保证算法收敛，对每一步的迭代修正量乘以式(14)所示的步长因子。主要功能为: 由于微分修正初始阶段，实际值与期望值差距较大，通过步长因子能够保证较小的修正量，防止一步“跨过”期望值而导致算法发散。同时，随着迭代修正次数不断增加，步长因子逐步增大并最终趋近于 1，不会影响收敛速度。即

$$k_1 = a - b^x \tag{14}$$

式中: a，b 为常数且取值 $a = 1$，$b = 0.85$，x 在每步迭代修正中以 $u = 0.1$ 增量增加。

而针对状态转移矩阵，通过仿真校验，在微分修正过程中，对状态转移矩阵进行比例变换后，微分修正迭代次数将会减少。具体地，比例系数可根据当前修正量与前一时刻修正量进行比较后增加或减小。以只考虑轨道高度约束的第一层修正为例，定义判别依据 $\delta\Delta h = \Delta h_i - \Delta h_{i-1}$，则比例系数 k_2^i 可表示为

$$\begin{cases} k_2^i = 1, & i = 1 \\ k_2^i = k_2^{i-1} - q_1, & \delta\Delta h \leqslant 0, i > 1 \\ k_2^i = k_2^{i-1} + q_1, & \delta\Delta h > 0, i > 1 \end{cases} \tag{15}$$

式中: q_1 为取值小于 0.1 的实数，本文中选取 $q_1 = 0.025$，而 i 为微分修正迭代次数。第二层与第三层修正分别选取轨道倾角与升交点赤经为判别依据。

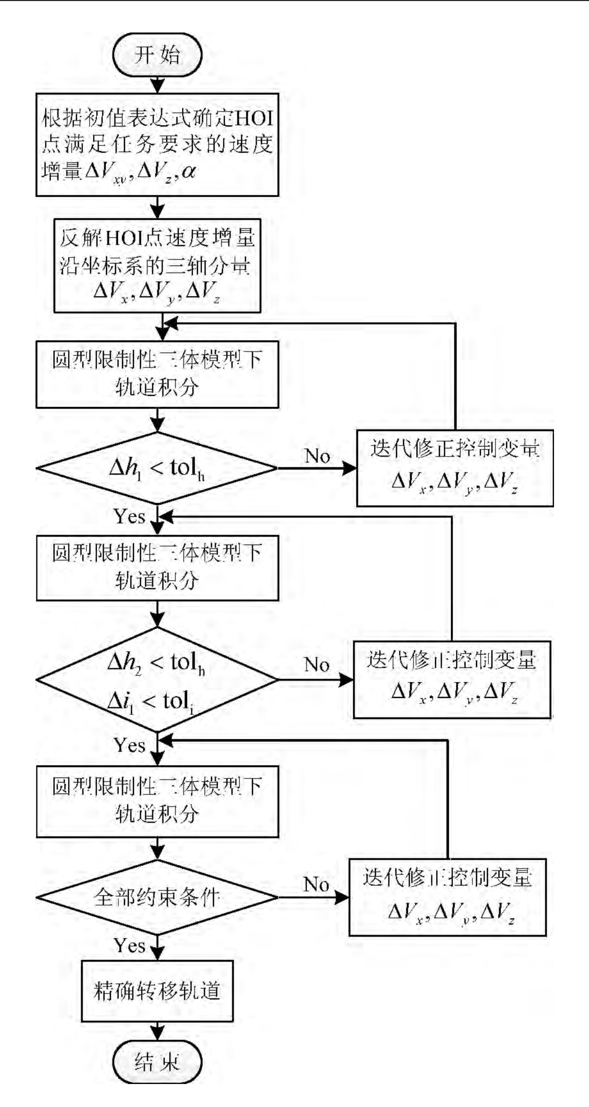


图 5　转移轨道分层修正流程图

Fig. 5　Flow chart of hierarchical differential corrections of transfer trajectory

3　仿真结果分析

3.1　多约束条件的转移轨道与算法比较

本文以 ISEE-3，SOHO 等太阳观测器的目标轨道为研究对象，即日地系统 L1 点附近法向幅值为 120000 km 的 Halo 轨道，利用微分修正初值多项式为控制变量提供初值，设计了多约束条件下的平动点转移轨道，并针对转移轨道末端不同约束条件下的飞行时间与速度增量进行讨论。

在求解会合坐标系与地心赤道惯性坐标系间的坐标转换矩阵时，选取发射时刻为 2015 年 8 月 10 日，对应的地球轨道根数满足: 升交点赤经 $\Omega_e = 347.95°$，轨道倾角 $i_e = -0.00198°$，纬度幅角 $\theta_e = -31.08°$。地球停泊轨道要素及任务约束要

求如表2所示。其中，升交点赤经在式（13）给定角度范围内取值，而轨道倾角的选取符合我国发射场对倾角的要求。

表2 任务约束条件

Table 2 The mission constraints

参数	约束条件
轨道高度 h /km	200
偏心率 e	0
轨道倾角 i /(°)	50
升交点赤经 Ω /(°)	-10
航迹角 γ /(°)	0
角度 β /(°)	20
位置误差	1×10^{-11}
角度误差	1×10^{-4}

针对以上约束条件，采用分层微分修正方法进行转移轨道设计。首先利用第一层微分修正将转移轨道末端轨道高度限定在400 km。然后在第二层微分修正中考虑轨道倾角约束，使得末端满足轨道高度300 km，轨道倾角 i = 40° 约束条件。最后通过第三层修正得到同时满足轨道高度、轨道倾角、升交点赤经及航迹角多个约束条件的精确转移轨道。

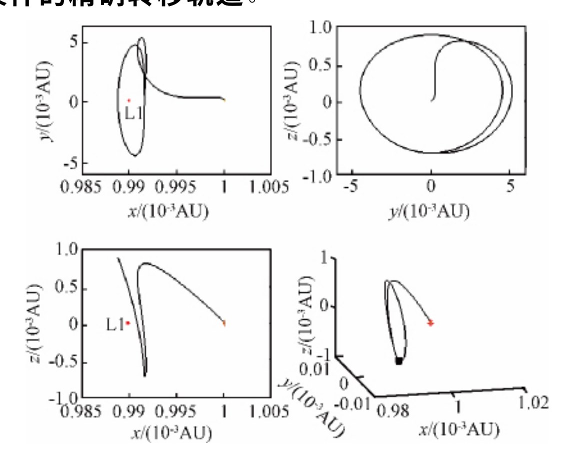


图6 考虑轨道高度约束的转移轨道

Fig. 6 Transfer trajectory design with altitude constraints

图6为第一层微分修正后转移轨道在会合坐标系下的三维视图及其投影图。在此层修正中，转移轨道飞行时间为105.5天，地球处机动速度增量大小为3208.89 m/s，Halo轨道入轨机动速度增量大小为35.45 m/s。

图7为考虑轨道高度与轨道倾角约束后的转移轨道。施加轨道倾角约束后，需要消耗一定的速度增量值对第一层转移轨道进行调整。此时，转移轨道飞行时间为103.2天，两次机动速度增量大小分别为3233.61 m/s与51.39 m/s。

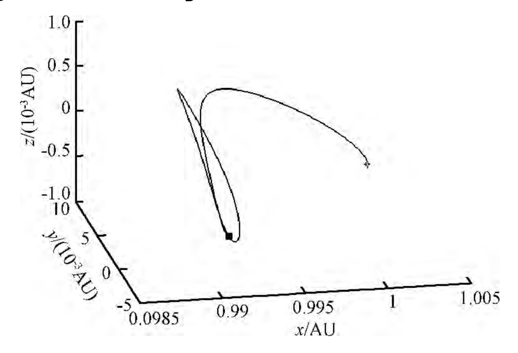


图7 施加轨道倾角后的转移轨道投影图

Fig. 7 The projection of transfer trajectory with inclination constraints

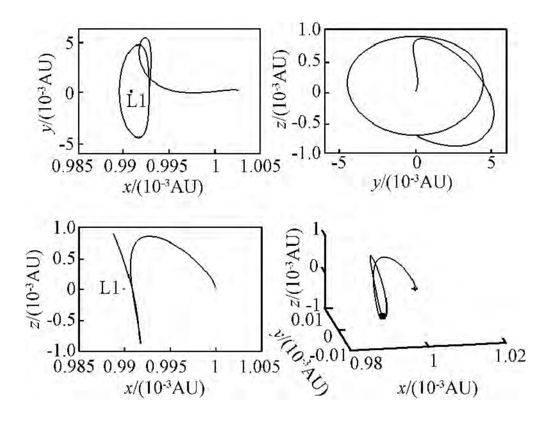


图8 精确转移轨道

Fig. 8 The precise transfer trajectory

图8描述了同时满足轨道高度、轨道倾角、升交点赤经及航迹角多个约束的精确转移轨道。首先，探测器施加3258.23 m/s大小的速度增量从200 km高度地球停泊轨道逃逸后，经过109.9天飞行到达SEL1点附近Halo轨道入轨点，再次施加速度增量56.09 m/s进入目标Halo轨道。

同时，为了比较单层微分修正算法与分层微分修正算法在处理多约束条件时存在的差异。本文在不同的初始条件与约束条件下，基于初值多项式，分别利用两种修正算法进行仿真，并分析两种算法在多约束条件时的收敛情况与迭代次数。

本文针对HOI处不同法向速度增量大小，即 ΔV_z = -5 m/s，0 m/s，5 m/s 三种情况进行分析，约束条件满足：轨道高度 h = 200 km；轨道倾角 i = 35° 并以3°增量增加直至 i = 50°；升交点赤经

$\Omega = -10°$ 并以 4°增量增加直至 $\Omega = 10°$。因此，每个法向速度增量大小下需要分析 36 种不同的约束条件。

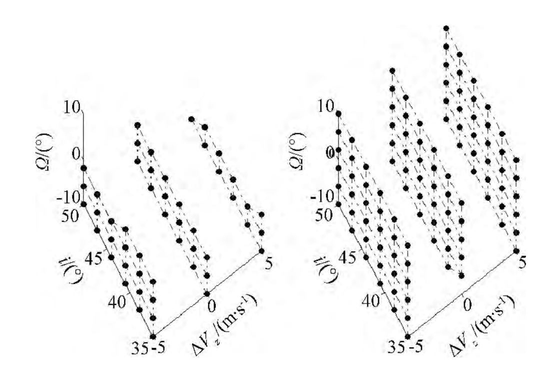


图 9　不同约束条件下单层(左)与分层(右)微分修正的收敛情况

Fig. 9　The astringency of monolayer (left) and hierarchical (right) differential corrections with different constraints

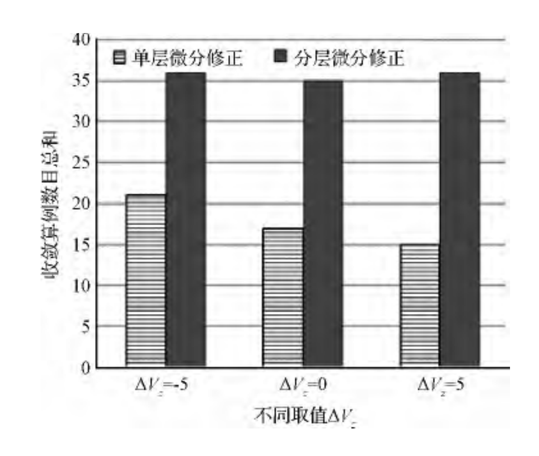


图 10　不同法向速度条件下，收敛算例数目比较图

Fig. 10　The comparison of the number of convergent examples with different normal velocity

图 9 与图 10 分别给出了三种法向速度取值条件下，利用单层与分层微分修正算法处理多约束问题时的收敛情况与对应的收敛算例数目，图 9 中点代表满足约束时对应的轨道倾角与升交点赤经。同时，为了比较两种修正算法的计算时间，本文以迭代次数为判断依据进行分析。如图 11 所示，描述了法向幅值 $\Delta V_z = -5$ m/s 时，两种算法在处理不同约束条件的迭代次数分布图，不同约束对应的迭代次数以点表示，其中编号 1 对应于 $i = 35°$，$\Omega = -10°$，编号 7 则对应于约束 $i = 38°$，$\Omega = -10°$，其他编号以此类推。

由图 9 与图 10 可知，在某些约束条件下，单层修正算法无法使得转移轨道末端满足给定的约束条件，而分层微分修正却能够很好地保证算法收敛于期望约束值。同时，从图 11 可见，在满足约束的条件下，单层与分层微分修正算法的迭代次数相近，但在部分情况下，分层微分修正算法的迭代次数优于单层微分修正迭代次数，其主要原因是，在某些条件下，为了保证单层修正算法的收敛性，需要式(14)中 k_1 取值较小，进而增加了迭代次数。因此，与单层修正算法相比，分层修正算法能够更好地处理转移轨道设计中的多约束问题。

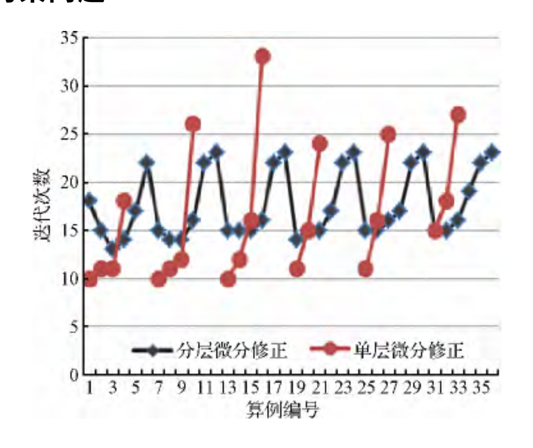


图 11　法向幅值 $\Delta V_z = -5$ m/s，迭代次数比较图

Fig. 11　The comparison of iterations with the normal amplitude $\Delta V_z = -5$ m/s

3.2　不同约束条件对转移轨道的影响

为了验证初值表达式在微分修正过程中的有效性，并分析不同约束条件取值对转移轨道设计的影响，分别对少约束、固定升交点赤经与固定轨道倾角的多约束条件下转移轨道进行设计分析。同时，结合我国发射场因素选定地球停泊轨道参数，即轨道倾角大于发射场纬度、东南方向发射。各项设计参数如表 3、表 4 及表 5 所示。

表 3　少约束条件下的转移轨道

Table 3　Transfer trajectory design with few constraints

轨道倾角/(°)	飞行时间/天	TTI 点机动速度增量/(m·s⁻¹)	HOI 点机动速度增量/(m·s⁻¹)
30	106.8	3258.25	34.61
40	108.9	3258.37	43.05
50	107.3	3258.53	54.28
60	107.4	3258.71	67.59
70	108.3	3258.96	81.35
80	109.7	3259.26	96.71

表 4 固定升交点赤经的多约束转移轨道

Table 4 Transfer trajectory with multiple constraints for fixed RAAN

升交点赤经/(°)	轨道倾角/(°)	飞行时间/天	TTI 点机动速度增量/(m·s⁻¹)	HOI 点机动速度增量/(m·s⁻¹)
-10	30	110.2	3258.20	35.77
	40	100.9	3258.25	54.34
	50	109.9	3258.23	56.09
	60	114.8	3258.25	77.47
	70	118.1	3258.38	98.69
	80	120.7	3258.31	119.01

表 5 固定轨道倾角的多约束转移轨道

Table 5 Transfer trajectory with multiple constraints for fixed inclination constraints

轨道倾角/(°)	升交点赤经/(°)	飞行时间/天	TTI 点机动速度增量/(m·s⁻¹)	HOI 点机动速度增量/(m·s⁻¹)
30	-10	110.2	3258.20	35.77
	0	104.7	3258.27	38.10
	10	114.8	3258.37	43.78
	20	110.1	3258.24	38.55
	30	116.1	3258.84	73.09
	40	113.6	3258.40	52.55

表 3 描述了轨道高度一定，轨道倾角变化对应的少约束转移轨道的飞行时间与各点速度增量的变化。表 4 则在表 3 中轨道高度约束的基础上增加升交点赤经约束，利用分层微分修正算法，分析了轨道倾角变化对应的多约束转移轨道的各项参数。表 5 给出了固定轨道倾角约束，升交点赤经变化的多约束转移轨道各点数值。由表 3 与表 4 可知，对于固定法向幅值 Halo 轨道的固定入轨点，随着轨道倾角不断增大，TTI 点机动速度增量变化较小，而 HOI 点施加的机动速度增量变化明显。表 4 与表 5 表明，分层微分修正算法能够处理多约束问题且初值多项式能够较好地保证算法收敛。

3.3 初值多项式对不同幅值 Halo 轨道与 HOI 点的适用性

在目标 Halo 轨道上选取不同 HOI 点对飞行时间与机动速度增量将产生影响，以下将验证本文所设计的初值多项式对于不同 HOI 点在转移轨道设计中的有效性。

首先将 Halo 轨道按照时间等分为 360 个点，定义 Halo 轨道与会合系 xy 平面相交两点中距离地球较远的点为 1 点，正向积分一周后对 Halo 轨道上点进行编号，如图 12 所示。

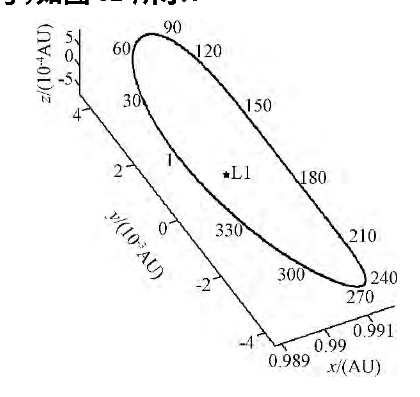


图 12 目标 Halo 轨道编号定义

Fig. 12 The definition of Halo trajectory numbering

选取 1 点作为 HOI 点，利用初值多项式设计了快速转移轨道与长时间转移轨道。快速转移轨道如图 13 所示，此转移轨道可实现天文任务中短时间到达目标轨道的目的。其飞行时间为 39.8 天，地球停泊轨道逃逸速度增量大小为 3262.68 m/s，HOI 点机动增量大小为 224.47 m/s。图 14 则描述了长时间条件下的平动点转移轨道，探测器施加 3259.03 m/s从地球逃逸后，飞行 185.1 天后，以大小为 58.78 m/s 的速度增量进入目标轨道。比较可知，对于 1 点入轨，若选择短时间飞行策略，需要消耗较大的入轨速度增量，而长时间飞行策略则将增大探测器飞行时间。

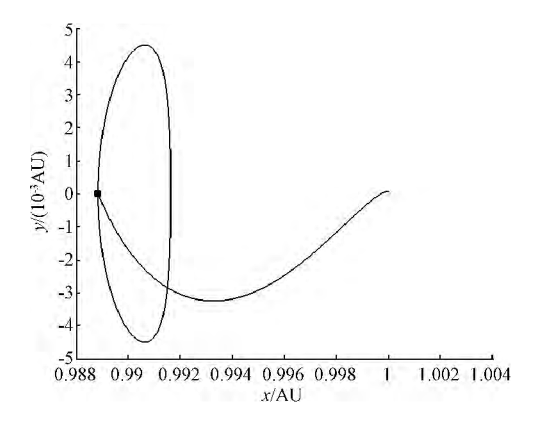


图 13 快速转移轨道

Fig. 13 The rapid transfer trajectory

针对不同 HOI 点，当选取 Halo 轨道上靠近地球一侧的点作为入轨点时，与背离地球一侧点比较，虽然需要消耗较大的速度增量，但能够缩短探测器的飞行时间。因此，本文选择同一法向幅值的 Halo 轨道上近地球一侧点作为入轨点，所设计的转移轨道

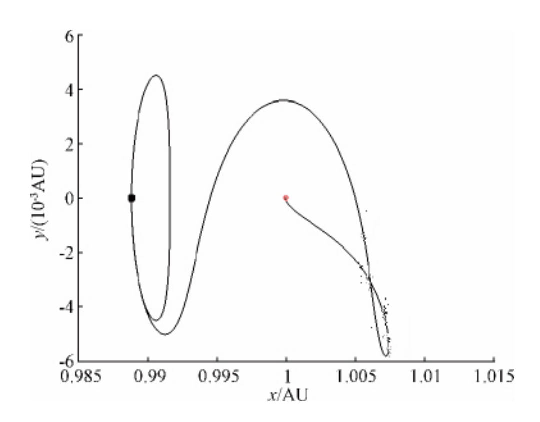


图 14　长时间转移轨道

Fig. 14　The transfer trajectory for long time

结果如表 6 所示。其中任务约束满足: 停泊轨道高度 $h = 200$ km，轨道倾角 $i = 54°$，升交点赤经 $\Omega = -15°$，目标 Halo 轨道法向幅值 $A_z = 120000$ km。从表 6 可见，针对同一幅值 Halo 轨道不同 HOI 点，满足多约束条件的转移轨道的差异主要存在于 HOI 点速度增量大小与飞行时间。

表 6　不同 HOI 点转移轨道参数

Table 6　Parameters of transfer trajectory for different HOI points

HOI 点	TTI 点机动速度增量/($m \cdot s^{-1}$)	HOI 点机动速度增量/($m \cdot s^{-1}$)	飞行时间/天
140	3258.34	98.22	101.2
160	3258.40	73.81	101.7
180	3258.52	58.05	108.8
200	3258.63	54.86	113.7
220	3258.78	56.78	120.4
240	3258.89	67.24	126.9

表 7　不同法向幅值 Halo 轨道设计参数

Table 7　Parameters of Halo trajectory design for different normal amplitudes

法向幅值/km	TTI 点机动速度增量/($m \cdot s^{-1}$)	HOI 点机动速度增量/($m \cdot s^{-1}$)	飞行时间/天
50000	3216.61	66.86	109.8
100000	3216.70	66.34	105.7
120000	3216.77	65.83	104.6
150000	3216.87	63.79	103.8
200000	3216.98	58.11	102.9
300000	3217.36	40.63	101.8

表 7 选取与表 6 相同的地球停泊轨道约束，针对不同法向幅值 Halo 轨道的固定入轨点 Node = 180，基于分层微分修正算法与初值多项式设计了满足多约束条件的转移轨道，并给出了各项参数的数值。由表 7 可知，随着法向幅值不断增大，转移轨道飞行时间与 HOI 点机动增量呈现减小趋势。

表 6 与表 7 进一步验证了本文设计的初值多项式适用于设计不同幅值 Halo 轨道的不同入轨点的转移轨道。

4　结　论

本文针对多约束条件下 Halo 轨道的转移轨道进行了研究，利用分层微分修正算法修正转移轨道末端以同时满足地球停泊轨道高度、轨道倾角、升交点赤经及航迹角等多约束条件。并且，对迭代改正量与状态转移矩阵进行了变换，从而保证与加快了算法收敛。同时，针对微分修正初值选取与敏感性问题，通过数据拟合设计了能够为控制变量提供良好初值的多项式。初值多项式能够满足不同幅值 Halo 的不同 HOI 点的转移轨道设计方案。通过具体算例进一步校验了分层微分修正算法在处理多约束问题的有效性，以及设计的初值多项式的实用性。

本文在仿真过程中虽然取定了特定时刻的地球轨道参数，但对于其他时刻，提出的修正算法同样适用。其次，在设计转移轨道过程中并未对结果进行优化。因此，本文基于分层微分修正算法与初值多项式设计的转移轨道是满足多约束条件、转移时间在 110 天左右且相比于短时间转移，能量比较节省的 SEL1 点转移轨道，对以 SEL1 点附近 Halo 轨道为目标轨道进行多约束转移轨道设计时具有参考价值。

参　考　文　献

[1]　刘林，侯锡云. 共线平动点的动力学特征及其在深空探测中的应用 [J]. 测试技术学报，2007，21: 165 – 171. [Liu Lin, Hou Xi-yun. The dynamics and applications of the collinear libration points in deep space exploration [J]. Journal of Test and Measurement Technology, 2007, 21: 165 – 171.]

[2]　Farquhar R W. The flight of ISEE-3/ICE: origins, mission history, and a legacy [C]. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference, Boston, USA, 1998.

[3]　Dunham D W, Jen S J, Robert C E. Transfer trajectory design for the SOHO libration-point mission [C]. The 43rd Congress of the International Astronautical Federation, Washington D C, 1992.

[4]　Howell K C, Barden B T, Wilson R S, et al. Trajectory design using a dynamical system approach with application to Genesis

[C]. AIAA/ AAS Astrodynamics Specialist Conference, Idaho, USA, 1997.

[5] 徐明. 平动点轨道的动力学与控制研究综述 [J]. 宇航学报, 2009, 30(4): 1300 – 1313. [Xu Ming. Overview of orbital dynamics and control for libration point orbits [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(4): 1300 – 1313.]

[6] Zazzera F B, Topputo F, Massari M. Assessment of mission design including utilization of libration points and weak stability boundaries [R]. ESTEC Contract No. 18147/04/NL/MV, 2004.

[7] Li M T, Zheng J H. The optimization of transfer trajectory for small amplitude Halo orbits [J]. Measurement and Control, 2008, 41(3): 81 – 84.

[8] 李明涛, 郑建华, 于锡峥, 等. 约束条件下的 Halo 轨道转移轨道设计 [J]. 宇航学报, 2009, 30(2): 438 – 441. [Li Ming-tao, Zheng Jian-hua, Yu Xi-zheng, et al. Transfer trajectory design for Halo orbit with multiple constraints [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(2): 438 – 441.]

[9] 胡少春, 孙承启, 刘一武. 基于序优化理论的晕轨道转移轨道设计 [J]. 宇航学报, 2010, 31(3): 663 – 668. [Hu Shao-chun, Sun Cheng-qi, Liu Yi-wu. Transfer trajectory design for Halo orbit based on ordinal optimization theory [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(3): 663 – 668.]

[10] Qi R, Xu S J. Optimal low-thrust transfers to lunar L1 Halo orbit using variable specific impulse engine [J]. Journal of Aerospace Engineering, 2014. Doi: 10.1061/(ASCE) AS. 1943 – 5525. 0000432.

[11] 雷汉伦, 徐波. 从地球到日 – 火系平动点轨道的转移 [J]. 宇航学报, 2013, 34(6): 764 – 772. [Lei Han-lun, Xu Bo. Low-thrust transfer to the libration point orbits of sun-mars system from the earth [J]. Journal of Astronautics, 2013, 34(6): 764 – 772.]

[12] Main D L. Transfer Trajectories from Earth Parking Orbits to L1 Halo Orbits [D]. Indiana: Purdue University, 1993.

[13] Koon W S, Lo M W, Marsden J E. Dynamical systems, the three-body problem and space mission design [M]. Singapore: World Scientific, 2004.

[14] Howell K C, Barden B T, Lo M W. Application of dynamical systems theory to trajectory design for a libration point mission [J]. Journal of Astronautical Sciences, 1997, 45: 161 – 178.

作者简介:
张景瑞(1974 –), 女, 教授, 研究方向为空间飞行器姿态动力学与控制、非线性控制。
通信地址: 北京理工大学求是楼分布式航天器系统技术研究所 (100081)
电话: (010) 68912285
Email: zhangjingrui@bit.edu.cn

(编辑: 曹亚君)